Réponse harmonique des systèmes du 1° et du 2° ordre

TD2

Réponse harmonique d'un système régi par une équation différentielle du 1° ordre

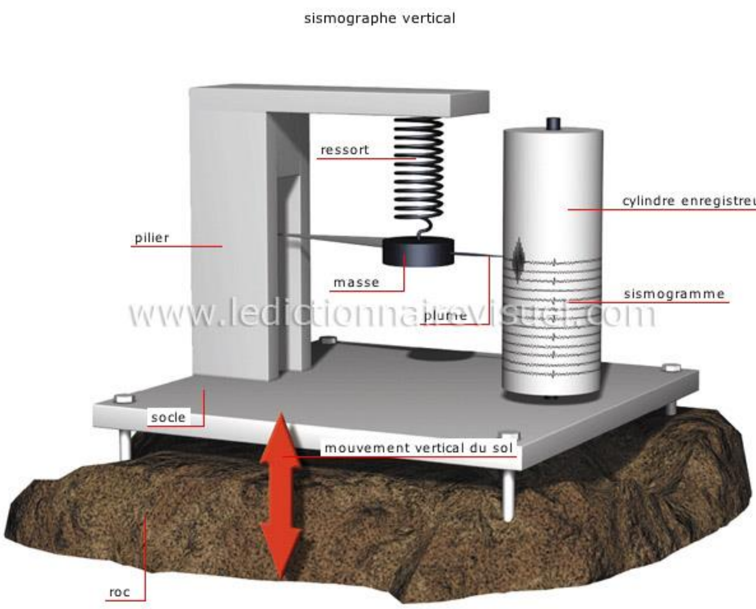
Etude d'un sismographe

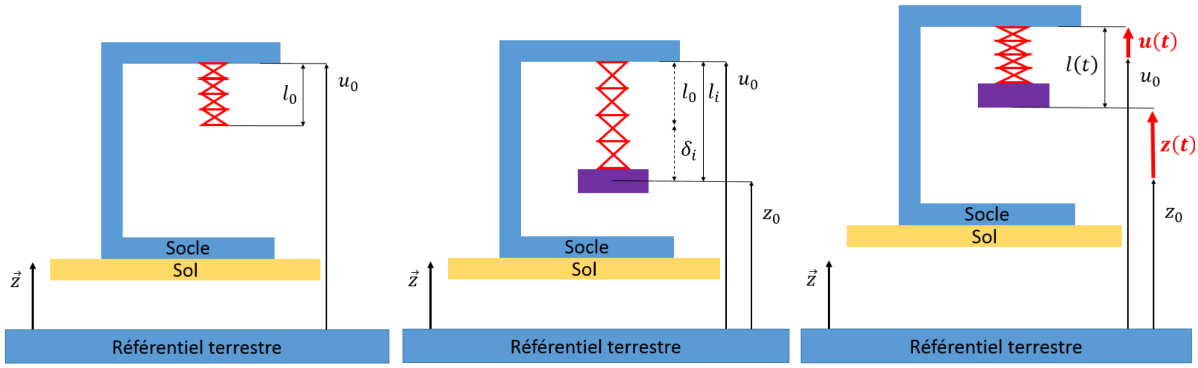
Programme - Compétences		
B24	MODELISER	Systèmes linéaires continus et invariants: - Modélisation par équations différentielles - Calcul symbolique - fonction de transfert; gain, ordre, classe, pôles, zéros
B25	MODELISER	Signaux canoniques d'entrée: - signaux sinusoïdaux
B28	MODELISER	Modèles de comportement

Exercice 1: Bode 2° ordre

Mise en situation

Reprenons le travail réalisé plus tôt dans l'année sur un sismographe.





Résultats antérieurs

Nous avons obtenu l'équation différentielle du mouvement de la masse $z(t)$ par rapport au référentiel terrestre et la fonction de transfert associée :

$$kz(t) + h\frac{dz(t)}{dt} + m\frac{d^2z(t)}{dt^2} = ku(t)$$
$$H(p) = \frac{Z(p)}{U(p)} = \frac{k}{k + hp + mp^2}$$

Nous avons alors choisi des coefficients afin de déterminer la solution temporelle à un séisme simplifié par transformation de Laplace inverse :

$$H(p) = \frac{2}{p^2 + 3p + 2}$$

Remarque : il est évident ici que les valeurs numériques sont peu réalistes et ont été choisies pour simplifier l'application.

$$u(t) = 10\sin(t)\ \forall t \geq 0$$
$$Z(p) = \frac{kU_0\omega}{(k + hp + mp^2)(p^2 + \omega^2)} = \frac{20}{(p^2 + 3p + 2)(p^2 + 1)} = \frac{20}{(p + 1)(p + 2)(p^2 + 1)}$$

$$z(t) = [-6\cos(t) + 2\sin(t) + 10e^{-t} - 4e^{-2t}]\ \forall t \geq 0$$

Objectifs

Nous allons montrer qu'il est bien plus simple de déterminer la solution temporelle harmonique d'un système du second ordre par l'intermédiaire d'un diagramme de Bode que par le calcul de la solution par transformée de Laplace inverse.

Dans un premier temps, nous allons déterminer à l'aide d'un diagramme de Bode la solution obtenue précédemment.

Dans un second temps, nous étudierons le sismographe vis-à-vis d'un cahier des charges imposé afin de déterminer la plage de pulsations des séismes qu'il est capable de mesurer lorsqu'il est utilisé dans l'air avec un amortissement non négligeable.

Enfin, nous étudierons l'effet de l'utilisation de ce même sismographe dans le vide, induisant un chute importante du coefficient d'amortissement.

Cahier des charges

L'amplitude des déplacements maximale issue des séismes mesurés sera supposée égale à

$$U_0 = 10\ mm$$

Compte tenu des dispositifs permettant de mesurer le déplacement de la masse z, on souhaite que celui-ci soit compris dans l'intervalle suivant :

$$z \in [0; 20\ mm]$$

Par ailleurs, si le sismographe tend à dépasser de plus de 2 fois la valeur maximale ci-dessus, il risque de se dégrader.

A partir d'une amplitude de z inférieure à 1 mm, la mesure est trop incertaine pour être fiable.

Solution antérieure

Question 1: Donner la réponse en régime permanent du sismographe $z(t)$

Question 2: Montrer que cette réponse se met sous la forme $z(t) = U_0 A \sin(t + \varphi)$ où A et φ seront donnés

Etude harmonique

On considère un séisme de pulsation ω tel que :

$$u(t) = U_0 \sin(\omega t)\ \forall t \geq 0$$

Question 3: Donner la forme de la réponse $z(t)$ en régime permanent

On rappel la fonction de transfert du sismographe dont les paramètres ont été fixés :

$$H(p) = \frac{2}{p^2 + 3p + 2}$$

Question 4: Déterminer les coefficients caractéristiques de ce sismographe

Question 5: Proposer la forme factorisée de $H(p)$

Question 6: Tracer le diagramme de Bode asymptotique du sismographe sur le document fourni

Sismographe dans l'air ambiant

Question 7: Déterminer une approximation de la réponse du sismographe au séisme étudié
Question 8: Déterminer précisément cette réponse par le calcul
Question 9: Comparer ce résultat à la solution obtenue par transformation de Laplace inverse
Question 10: Conclure sur ce résultat vis-à-vis du cahier des charges
Question 11: Par lecture graphique, donner la pulsation de l'onde sismique $\boldsymbol{\omega}$ à partir de laquelle la précision de mesure devient incertaine
Question 12: En conclure sur la plage de pulsations mesurables avec ce sismographe

Sismographe dans le vide

On suppose maintenant que l'on fait fonctionner le sismographe dans le vide. L'amortissement se retrouve diminué et on montre que la fonction de transfert se met sous la forme :

$$H(p) = \frac{2}{p^2 + 0{,}02p + 2}$$

Question 13: Déterminer les coefficients caractéristiques du sismographe dans le vide
Question 14: Tracer le diagramme de Bode asymptotique du sismographe sur le document fourni
Question 15: Déterminer une approximation de la réponse du sismographe au séisme étudié
Question 16: Conclure sur ce résultat vis-à-vis du cahier des charges
Question 17: Que se passe-t-il si la pulsation du séisme $\boldsymbol{\omega}$ se rapproche de $\boldsymbol{1{,}4\,rd.s^{-1}}$
Question 18: Par lecture graphique, donner la plage de pulsations de l'onde sismique $\boldsymbol{\omega}$ mesurable par ce sismographes dans le vide